Al final del documento están los ejercicios en papel.

Ejercicio 1.

En el gimnasio Poincaré a final de cada mes un 5% de los socios se da de baja pero, por suerte, consigue captar 5 socios nuevos mensualmente.Indicaciones:
La suma de una serie geométrica

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}.$$

Para la pregunta sobre los puntos periódicos puede ser útil, aunque no necesario, el Teorema de Sarkovskii (no visto en la asignatura).

(a) Escribe el sistema dinámico discreto asociado, indicando claramente los estados y la función f.

Número socios al final del mes
Nn+1 = Nn - 0.05 Nn + 5
Nn+1 = 0.95 Nn + 5
No = Número inicial de socios
N1 = 0.95 No + 5 N2 = 0.95
N1 + 5 = 0.95(0.95 No + 5) 0.95^2 No + 0.95 x 5 + 5

Sistema dinámico discreto
Nn+1 = 0.95 Nn + 5

(b) ¿El sistema del apartado anterior es lineal? En caso afirmativo, escribe la solución general de forma explícita para un número inicial de socios N0.

Función lineal y = mx + b
y = variable dependiente
x = variable independiente
m = pendiente de la línea 0.95
b = intersección de y = 5

Resolver ecuación homogénea G = 0
Nn+1 = 0.95
Nn No = C $(0.95)^n$

Resolver ecuación particular
Np = 0.95 Np + 5
0.05 Np = 5
Np = 5 / 0.05 = 100

Determinar C
No = número inicial de socios
No = C $(0.95)^0$ + 100
No = C + 100
C = No - 100
Solución general de forma explícita
$N_n = (N_o - 100)(0.95)^n + 100$

(c) ¿Tiene el sistema puntos de equilibrio? En caso afirmativo, encuéntralos y clasifícalos.
Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es un valor Ne tal que si el sistema alcanza este valor permanecerá en él indefinidamente.

Nn+1=Nn · Ne
Sustituimos Nn y Nn+1 por Ne:
Ne = 0.95Ne + 5
Ne - 0.95 = 5
0.05Ne = 5
Ne = 5/0.05 = 100
Punto de equilibrio = 100
Clasificando punto de equilibrio "100":
Estable o inestable.
Si el factor multiplicativo de Nn es <1 el punto de equilibrio es estable y si es >1 es inestable.
$0.95 < 1 \implies$ el punto de equilibrio 100 es estable.

(d) ¿Tiene el sistema puntos periódicos de algún periodo?

Un punto periódico de un sistema dinámico es un valor N tal que después de un número X (o de iteraciones) el sistema vuelve al mismo valor.

Nn_+ k = Nn
Nn_+ 1= 0.95Nn + 5
Nn_+ 2 = 0.95Nn + 1 + 5
Nn_+ 2 = 0.95(0.95Nn + 5) + 5
Nn_+ 2=0.95^2Nn + 0.95 · 5 + 5
Nn_+ 2 = 0.9025Nn + 4.75 + 5
Nn_+ 2 = 0.9025Nn + 9.75
N = 0.9025N + 9.75
N − 0.9025N = 9.75
0.0975N = 9.75

N = 9.75/0.0975 = 100

N_n+3 = 0.95N_n+2+5
N3 = 0.857375No + 14.2625
N0 = 142625/0.142625 = 100

No hay puntos periódicos distintos del punto de equilibrio N=100

(e) Si cada socio paga 25 euros de cuota mensual, ¿a qué valor tenderán los ingresos del gimnasio a largo plazo?
El número de socios tenderá a 100 a largo plazo
Número de socios = 100
Cuota mensual socio = 25
Ingresos mensuales a largo plazo = 100*25 = 2500 Euros

Los ingresos mensuales a largo plazo del gimnasio tenderán a 2500 euros.

Ejercicio 2.

Una fábrica produce un producto cuya cantidad de producción Qn, en miles de unidades, en el mes n depende de la cantidad producida el mes anterior de la siguiente forma

$$Q_n = D \sin\left(\frac{Q_{n-1}}{C}\right) \text{ si } 0 \leq Q_n \leq 5\pi,$$

siendo D = 12 la demanda máxima mensual estimada y C = 5 la capacidad de producción de la fábrica.
Se quiere estudiar la cantidad a producir a largo plazo.

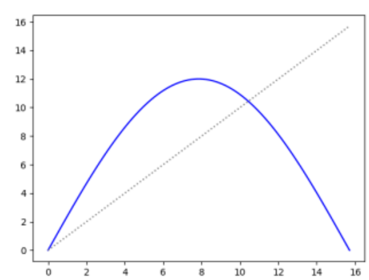

Figura 1: Gráfica de $f(Q)$

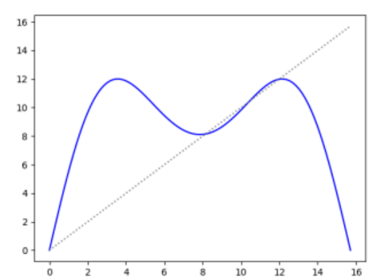

Figura 2: Gráfica de $f(f(Q))$

(a) Encuentra numéricamente los puntos de equilibrio del sistema en el intervalo [0, 5π], con un error inferior a 10−5. Para ello, programa y utiliza alguno de los métodos vistos en clase.

Los puntos de equilibrio son:

$Q \approx 0.0$

$Q \approx 10.43564$

codigo:

```
# Encontrar puntos de equilibrio
def find_equilibrium_points():
    Q_values = np.linspace(0, 5 * np.pi, 1000)
    tolerance = 1e-5
    equilibrium_points = []
    for Q0 in Q_values:
        try:
            root = newton(func=lambda Q: f(Q) - Q, fprime=lambda Q: f_prime(Q) - 1, x0=Q0, tol=tolerance)
            if all(abs(root - eq) > tolerance for eq in equilibrium_points):
                equilibrium_points.append(root)
        except (RuntimeError, OverflowError):
            continue
    return equilibrium_points
```

(b) Clasifica los equilibrios del sistema.

$Q \approx 0.0$ Inestable

$Q \approx 10.43564$ Inestable

codigo:

```
# Clasificar puntos de equilibrio
def classify_equilibrium_points(points):
    classification = []
    for eq in points:
        if 0 <= eq <= 5 * np.pi:
            derivative_at_eq = f_prime(eq)
            stability = "estable" if abs(derivative_at_eq) < 1 else "inestable"
            classification.append((eq, derivative_at_eq, stability))
    return classification
```

(c) ¿Existen órbitas periódicas de periodo 2? En caso afirmativo, encuéntralas y clasifícalas en atractoras o repulsoras. Para ello puedes usar el siguiente criterio: sea $\gamma = \{x_1, x_2\}$ una órbita periódica de período dos, entonces

si $|f'(x_1)f'(x_2)| < 1$ la órbita es atractora.

si $|f'(x_1)f'(x_2)| > 1$ la órbita es repulsora.

Sí, existen órbitas periódicas de período 2:

Órbita: (0.00000, 0.00000), Clasificación: Repulsora

Órbita: (15.70796, 15.70796), Clasificación: Repulsora

codigo:

```python
# Encontrar y clasificar órbitas de periodo 2
def find_period_2_orbits():
    Q_values = np.linspace(0, 5 * np.pi, 1000)
    tolerance = 1e-5
    period_2_points = []
    for Q0 in Q_values:
        try:
            root = newton(func=lambda Q: ff(Q) - Q, fprime=ff_prime, x0=Q0, tol=tolerance)
            if all(abs(root - eq) > tolerance for eq in period_2_points):
                period_2_points.append(root)
        except (RuntimeError, OverflowError):
            continue
    period_2_classification = []
    for p2 in period_2_points:
        if 0 <= p2 <= 5 * np.pi:
            derivative_at_p2 = ff_prime(p2)
            stability = "atractora" if abs(derivative_at_p2) < 1 else "repulsora"
            period_2_classification.append((p2, derivative_at_p2, stability))
    return period_2_classification
```

(d) Comenta que pasará con la cantidad a producir a largo plazo. ¿La cantidad a producir se mantendrá constante a largo plazo? Ayúdate de los apartados anteriores y, si lo deseas, de los cobweb plots para Q_0 = 5, 10, 15.

A largo plazo, la cantidad a producir tenderá a estabilizarse en uno de los puntos de equilibrio estables o en una órbita de período 2 atractora, dependiendo del valor inicial de la producción Q0.
Si Q0 está cerca de un punto de equilibrio estable, la producción se mantendrá constante en ese valor.
Si Q0 conduce a una órbita de período 2 atractora, la producción oscilará entre dos valores.

Ejercicio 3.

Encuentra y clasifica los equilibrios del sistema

$$x_n = \mu x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1}^2$$

en función del parámetro real μ. Para los casos en los que no aplique el criterio explicado en las cápsulas docentes, estudia la dinámica usando cobweb-plots.

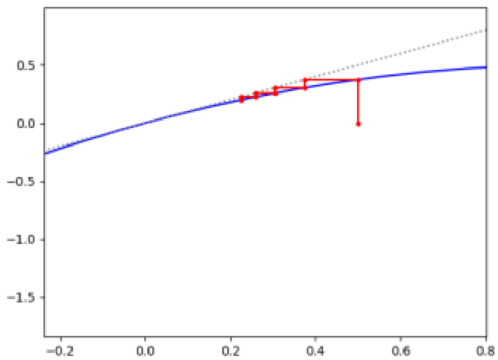

Figura 3: $\mu = 1,\ x_0 = 0{,}5$

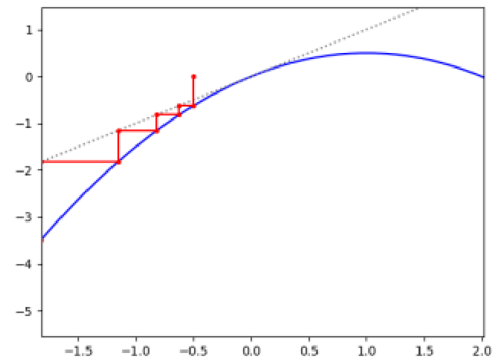

Figura 4: $\mu = 1,\ x_0 = -0{,}5$

1-a) N_{n+1} = número socios al final del mes

$N_{n+1} = N_n - 0{,}05 N_n + 5$

$N_{n+1} = 0{,}95 N_n + 5$

N_0 = Numero inicial de socios

$N_1 = 0{,}95 N_0 + 5$

$N_2 = 0{,}95 N_1 + 5 = 0{,}95(0{,}95 N_0 + 5) =$

$0{,}95^2 N_0 + 0{,}95 \times 5 + 5$

Sistema dinamico discreto

$N_{n+1} = 0{,}95 N_n + 5$

1-b) Funcion lineal $y = mx + b$

y = variable dependiente

x = variable independiente

m = pendiente de la linea = 0,95

b = interseccion de y = 5

Resolver ecuación homogenea $b = 0$

$N_{n+1} = 0{,}95 N_n$

$N_n = C (0{,}95)^n$

Resolver ecuación particular

$N_p = 0{,}95 N_p + 5$

$0{,}05 N_p = 5$

$N_p = \frac{5}{0{,}05} = 100$

Determinar C

N_0 = número inicial de socios

$N_0 = C(0{,}95)^0 + 100$

$N_0 = C + 100$

$C = N_0 - 100$

Solución general de forma explicita

$N_n = (N_0 - 100)(0{,}95)^n + 100$

1c) Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es un valor N_e tal que si el sistema alcanza este valor, permanecerá en el indefinidamente

$N_{n+1} = N_n = N_e$

Sustituimos N_n y N_{n+1} por N_e

$N_e = 0{,}95 N_e + 5$

$N_e - 0{,}95 = 5$

$0{,}05 N_e = 5$

$N_e = \frac{5}{0{,}05} = 100$

punto de equilibrio $= 100$

Clasificando punto de equilibrio "100": Estable o inestable.

Si el factor multiplicativo de N_n es < 1 el punto de equilibrio es estable si es > 1 es inestable

$0{,}95 < 1 \rightarrow$ el punto de equilibrio 100 es estable.

1d) Un punto periódico de un sistema dinámico es un valor N tal que, después de un número fijo de iteraciones k, el sistema vuelve al mismo valor.

$$N_{n+k} = N_n$$

$$N_{n+1} = 0{,}95 N_n + 5$$

$$N_{n+2} = 0{,}95 N_{n+1} + 5$$

$$N_{n+2} = 0{,}95(0{,}95 N_n + 5) + 5$$

$$N_{n+2} = 0{,}95^2 N_n + 0{,}95 \cdot 5 + 5$$

$$N_{n+2} = 0{,}9025 N_n + 4{,}75 + 5$$

$$N_{n+2} = 0{,}9025 N_n + 9{,}75$$

$$N = 0{,}9025 N + 9{,}75$$

$$N - 0{,}9025 N = 9{,}75$$

$$0{,}0975 N = 9{,}75$$

$$N = \frac{9{,}75}{0{,}0975} = 100$$

$$N_{n+3} = 0{,}95 N_2 + 5$$

$$N_{n+3} = 0{,}95(0{,}9025 N_0 + 9{,}75) + 5$$

$$N_3 = 0{,}857375 N_0 + 14{,}2625$$

$N_3 = N_0$ $\qquad 0{,}857375 N_0 + 14{,}2625 = N_0$

$$N_0 = \frac{14{,}2625}{0{,}142625} = 100$$

No hay puntos periódicos distintos al punto de equilibrio N = 100.

1e) El número de socios tenderá a 100 a largo plazo

Número socios = 100

Cuota mensual socio = 25

Ingresos mensuales a largo plazo

I mensuales = 100 x 25 € = 2500 €

Los ingresos mensuales a largo plazo del gimnasio tenderá a 2500 €