Al final del documento están los ejercicios en papel.

Ejercicio 1.

(a)

El modelo de las cápsulas que mejor se ajusta a la situación descrita es el modelo de Cadenas de Markov, un modelo matricial de poblaciones.

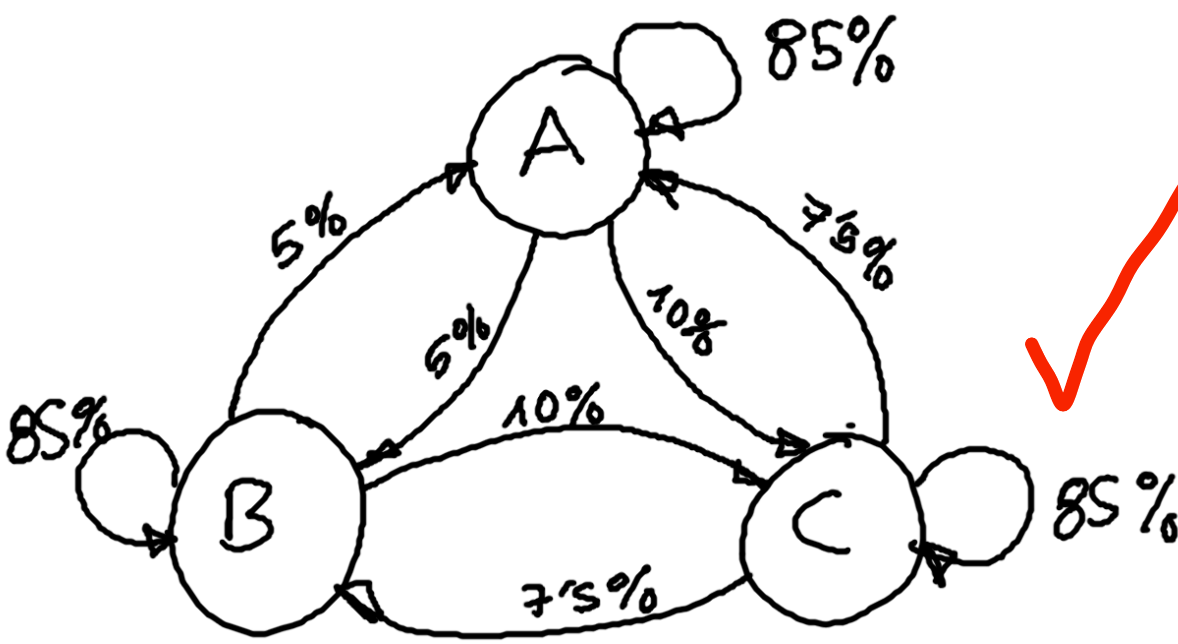
El enunciado se ajusta a las características del modelo:
Una Cadena de Markov representa un sistema que varía su estado a lo largo del tiempo, siendo cada cambio una transición del sistema. Aunque los cambios no están predeterminados, las probabilidades del próximo estado en función del estado anterior son conocidas.
Las probabilidades son constantes a lo largo del tiempo, el sistema es homogéneo.

x^(n+1) = Px^(n)

El modelo matricial es:

$$x^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,075 \\ 0,05 & 0,85 & 0,075 \\ 0,1 & 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} x^{(n)} = Mx^{(n)}$$

Diagrama de estados:



(b)

Estado inicial x^(0)= (0.6, 0.2, 0.2)

La variación porcentual de usuarios de A pasadas tres campañas publicitarias es -25,9%

$$Vporcentual = (\frac{0,4446 - 0,60}{0,60}) * 100 = -25,9\%$$

```
import numpy as np

T = np.array([
    [0.85, 0.05, 0.075],
    [0.05, 0.85, 0.075],
    [0.1, 0.1, 0.85]
])

#  T^3
T_3 = np.linalg.matrix_power(T, 3)
print('T_3', T_3)

```

```
T_3 [[0.640375  0.128375  0.1734375]
 [0.128375  0.640375  0.1734375]
 [0.23125   0.23125   0.653125 ]]
```

[15]

```
#Estado inicial
x0 = np.array([0.60, 0.20, 0.20])

# Distribución después de tres campañas
x3 = np.dot(T_3, x0)
print('Distribución después de tres campañas', x3)

```

```
Distribución después de tres campañas [0.4445875 0.2397875 0.315625 ]
```

[16]

```

valor_inicial = 0.60
valor_final = 0.4446


variacion_porcentual = ((valor_final - valor_inicial) / valor_inicial) * 100


print('variacion_porcentual de A', variacion_porcentual)

```

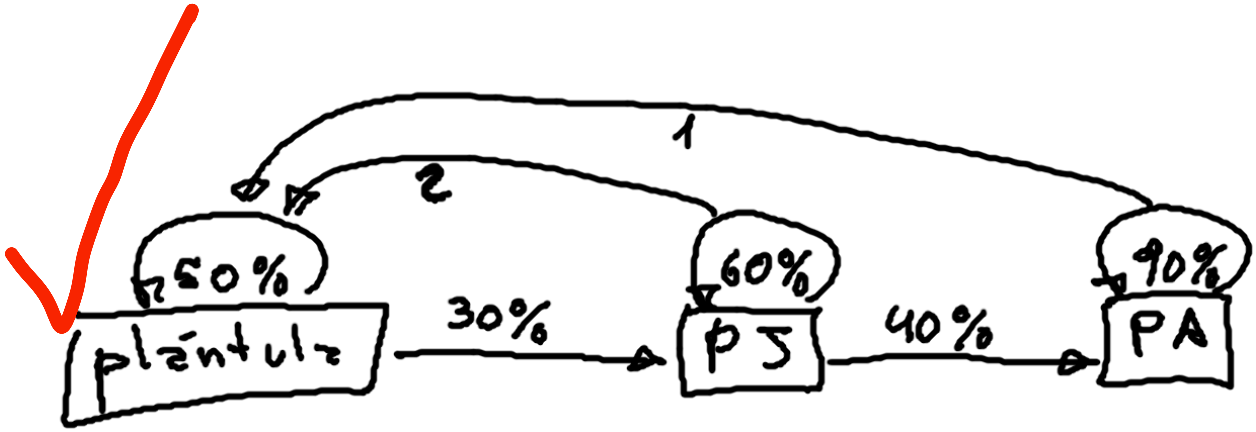
```
variacion_porcentual de A -25.900000000000002
```

(c)
En este caso se obtiene como valor propio dominante 1 (como siempre en las cadenas de Markov) y las probabilidades a largo plazo son: 40% de usuarios en la compañía A, 30% de usuarios en la compañía B y 30% de usuarios en la compañía C.

```python
import numpy as np


P = np.array([
    [0.85, 0.05, 0.075],
    [0.05, 0.85, 0.075],
    [0.10, 0.10, 0.85]
])

# Valores propios y vectores propios
eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(P)

# Vector propio asociado al valor propio λ = 1
index = np.argmax(eigenvalues)
stationary_vector = eigenvectors[:, index]

# Normalizar el vector propio
stationary_vector_normalized = stationary_vector / np.sum(stationary_vector)


print("Valores propios:", eigenvalues)
print("Vector propio asociado a λ=1 (no normalizado):", stationary_vector)
print("Vector propio normalizado (distribución a largo plazo):", stationary_vector_normalized)

```

```
Valores propios: [1.   0.8  0.75]
Vector propio asociado a λ=1 (no normalizado): [-0.51449576 -0.51449576 -0.68599434]
Vector propio normalizado (distribución a largo plazo): [0.3 0.3 0.4]
```

Ejercicio 2.
(a)
El modelo de las cápsulas que mejor se ajusta a la situación descrita es
el modelo de Lefkovitch.
El Modelo de Lefkovitch es una extensión del Modelo de Leslie, utilizado en ecología para estudiar la dinámica de poblaciones estructuradas en clases de edad o etapas de desarrollo. A diferencia del modelo de Leslie, que se aplica específicamente a clases de edad, el modelo de Lefkovitch se aplica a cualquier subdivisión de la población en categorías que pueden representar diferentes etapas de desarrollo, estados o tamaños. Este modelo es particularmente útil para especies vegetales y animales que no tienen clases de edad bien definidas.



El modelo matricial es:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 1 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

(b)

Así pues, pasados 4 meses habrá, aproximadamente 514 plántulas, 181 plantas jovenes y 128 plantas adultas.

```
import numpy as np

# modelo matricial
transition_matrix = np.array([
    [0.5, 2, 1],
    [0.3, 0.6, 0],
    [0, 0.4, 0.9]
])

initial_state = np.array([100, 50, 20])

# Estado de la población después de 4 meses
state_after_1_month = np.dot(transition_matrix, initial_state)
state_after_2_months = np.dot(transition_matrix, state_after_1_month)
state_after_3_months = np.dot(transition_matrix, state_after_2_months)
state_after_4_months = np.dot(transition_matrix, state_after_3_months)

#Población después de 4 meses
print('Población después de 4 meses', state_after_4_months)

```

```
Población después de 4 meses [514.23   181.17   128.502]
```

c)

Como es comprensible las plantas jóvenes y adultas aportan plántulas aumentando de número con el tiempo.

```python
import numpy as np

# modelo matricial
P = np.array([
    [0.5, 2, 1],
    [0.3, 0.6, 0],
    [0, 0.4, 0.9]
])


# Población inicial
initial_population = np.array([100, 50, 20])

# Calcular la matriz de transición después de 4 meses
P_4_months = np.linalg.matrix_power(P, 4)

# Comportamiento de la población a largo plazo
population_4_months = initial_population @ P_4_months
print('Comportamiento de la población a largo plazo', population_4_months)

```

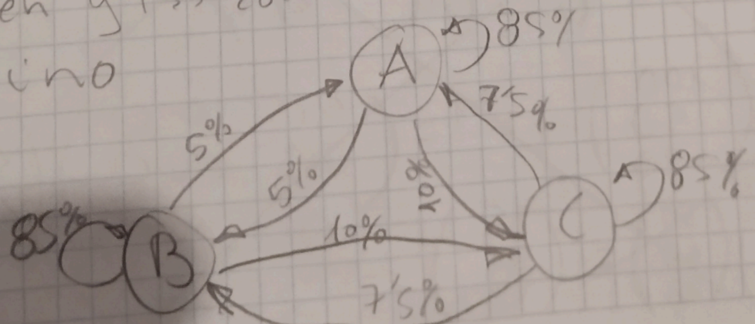
```
Comportamiento de la población a largo plazo [214.459 680.06  380.132]
```

a) El modelo de las capsulas que mejor se ajusta a la situación descrita es el modelo de cadenas Markov, es un modelo matricial de poblaciones
El enunciado se ajusta a las caracteristicas del modelo:
Es un sistema que varia su estado a lo largo del tiempo, siendo cada cambio una transición del sistema
Aunque los cambios no están predeterminados, las probabilidades del proximo estado anterior son conocidas.
Las probabilidades son constantes a lo largo del tiempo, el sistema es homogeneo

Modelo matricial

$$X^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}075 \\ 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}075 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix} X^{(n)} = M x^{(n)}$$

Las filas representan las compañias de origen y las columnas las compañias de destino



6) Estado inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,20 \\ 0,20 \end{pmatrix}$

Para saber la variación porcentual de usuarios de A pasadas tres campañas publicitarias.

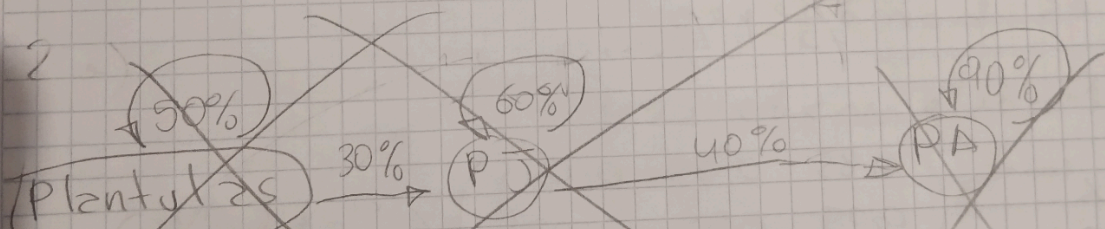
$x^{(3)} = M x^{(0)} =$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,075 \\ 0,05 & 0,85 & 0,075 \\ 0,1 & 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,640375 & 0,128375 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$T^3 \cdot x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,4446 \\ 0,2398 \\ 0,3156 \end{pmatrix}$$ compañía A, B, C

$$\text{Variación porcentual} = \left(\frac{\text{Valor final} - \text{Valor inicial}}{\text{Valor inicial}} \right) \times 100$$

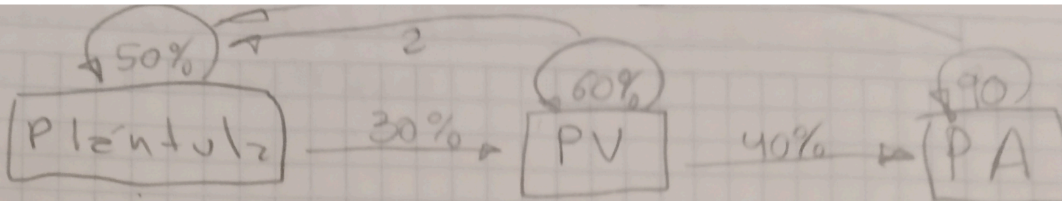
1 Mes



$$\vec{x}^{(t)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \vec{x}^{(t-1)}$$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} \to \vec{x}^{1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 51 \end{pmatrix}$$



$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$$